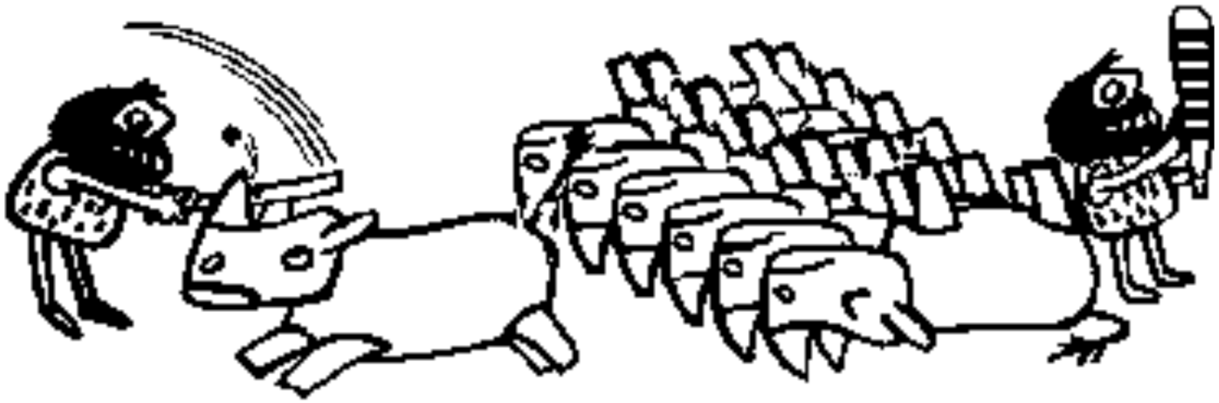
CAPÍTULO 6



ECUACIONES DIFERENCIALES:

EL PROBLEMA DEL VALOR INICIAL:

Métodos Multipasos: Predictor-Corrector

MÉTODOS MULTIPASOS

- Los métodos de Euler y de RK son llamados de paso simple porque sólo usan información del último paso.
- El principio detrás de los métodos multipasos es utilizar valores pasados de la función o de su derivada para construir un polinomio que aproxime la función derivada, para luego integrarla.

MÉTODOS MULTIPASOS

$$\int_{t_i}^{t_j} \mathrm{y}'(t, y(t))\mathrm{d}t = \int_{t_i}^{t_j} \mathrm{f}(t, y(t))\mathrm{d}t = \int_{t_i}^{t_j} \mathrm{p}_\mathrm{n}(t, y(t))\mathrm{d}t$$

$$\mathrm{y}(\mathrm{t}_\mathrm{j}) - \mathrm{y}(\mathrm{t}_\mathrm{i}) = \int_{t_i}^{t_j} \mathrm{P}_\mathrm{n}(t, y(t))\mathrm{d}t$$

$$\mathrm{y}(\mathrm{t}_\mathrm{j}) = \mathrm{y}(\mathrm{t}_\mathrm{i}) + \int_{t_i}^{t_j} \mathrm{P}_\mathrm{n}(t, y(t))\mathrm{d}t$$

MÉTODOS MULTIPASOS

$$\mathrm{y}_{\mathrm{i+1}} = \mathrm{y}_{\mathrm{i}} + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \mathrm{P}_{\mathrm{n}}(t)\mathrm{d}t$$

Usando Newton-Gregory hacia atrás:

$$\mathrm{y}_{\mathrm{i+1}} = \mathrm{y}_{\mathrm{i}} + \int_0^1 \left(\mathrm{f}_{\mathrm{n}} + \mathrm{s}\Delta \mathrm{f}_{\mathrm{n\text{-}1}} + \frac{(s+1)s}{2} \Delta^2 f_{n-2} + error \right) hds$$

$$\mathrm{y}_{\mathrm{i+1}} = \mathrm{y}_{\mathrm{i}} + \int_0^1 \left(\mathrm{f}_{\mathrm{n}} + \mathrm{s}\Delta \mathrm{f}_{\mathrm{n\text{-}1}} + \frac{(s+1)s}{2} \Delta^2 f_{n-2} \right) hds + \int_0^1 \frac{s(s-1)(s-2)}{6} h^3 f'''(\xi) hds$$

METODOS DE MULTIPASOS

$$P_1(t) = y_i + (t - t_i)\frac{f(t_{i+1}, y_{i+1}) - f(t_i, y_i)}{h}$$

$$y^*_{i+1} = y_i + h\frac{f(t_i, y_i) + f(t_i, y_i)}{2}$$

METODO DE MILNE

$$y_{i+1} = y_{i-3} + \int_{t_{i-3}}^{t_{i+1}} P_3(t)\,dt$$

$$\begin{aligned}
P_3(t) = {} & \frac{t - t_{i-3}}{t_i - t_{i-3}} \frac{t - t_{i-2}}{t_i - t_{i-2}} \frac{t - t_{i-1}}{t_i - t_{i-1}} f(t_i, y_i) \\
& + \frac{t - t_{i-3}}{t_{i-1} - t_{i-3}} \frac{t - t_{i-2}}{t_{i-1} - t_{i-2}} \frac{t - t_i}{t_{i-1} - t_i} f(t_{i-1}, y_{i-1}) \\
& + \frac{t - t_{i-3}}{t_{i-2} - t_{i-3}} \frac{t - t_{i-1}}{t_{i-2} - t_{i-1}} \frac{t - t_i}{t_{i-2} - t_i} f(t_{i-2}, y_{i-2}) \\
& + \frac{t - t_{i-2}}{t_{i-3} - t_{i-2}} \frac{t - t_{i-1}}{t_{i-3} - t_{i-1}} \frac{t - t_i}{t_{i-3} - t_i} f(t_{i-3}, y_{i-3})
\end{aligned}$$

METODO DE MILNE

$$y_{i+1} = y_{i-3} + \frac{4h}{3}[2f(t_i , y_i) - f(t_{i-1} , y_{i-1}) + 2f(t_{i-2} , y_{i-2})]$$

ERROR

$$E_{i+1} = \frac{14}{45} h^5 y^{(5)}(\xi_i), \qquad t_i < \xi_i < t_{i+1}$$

METODO DE MILNE

$$\mathrm{y}_{\mathrm{i+1}} = \mathrm{y}_{\mathrm{i\text{-}n}} + \int_{t_{i-n}}^{t_{i+1}} \mathrm{P}_\mathrm{n}(t)\mathrm{d}t = \mathrm{y}_{\mathrm{i\text{-}n}} + \sum_{\mathrm{j=0}}^{\mathrm{n}} \mathrm{b}_{\mathrm{jn}} f(t_{i-j}, y_{i-j})$$

Tabla 6-1: Coeficientes para la fórmula predictiva del método de Milne

n	b_{0n}	b_{1n}	b_{2n}	b_{3n}	b_{4n}	b_{5n}	Denominador
0	1						1
1	2	0					1
2	27	0	9				12
3	8	-4	8	0			3
4	425	-350	600	-50	95		288
5	132	-168	312	-168	132	0	40

METODO DE MILNE-CORRECTOR

$$y_{i+1} = y_{i-1} + \int_{t_{i-1}}^{t_{i+1}} P_2(t)\,dt$$

$$P_2(t) = \frac{t - t_{i-1}}{t_{i+1} - t_{i-1}} \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i} f(t_{i+1}, y_{i+1}) + \frac{t - t_{i-1}}{t_i - t_{i-1}} \frac{t - t_{i+1}}{t_i - t_{i-+1}} f(t_i, y_i)$$

$$+ \frac{t - t_i}{t_{i-1} - t_i} \frac{t - t_{i+1}}{t_{i-1} - t_{i+1}} f(t_{i-1}, y_{i-1})$$

$$y_{i+1} = y_{i-1} + \frac{h}{3}[f(t_{i+1}, y_{i+1}) + 4f(t_i, y_i) + f(t_{i-1}, y_{i-1})]$$

$$E_{i+1} = -\frac{1}{90} h^5 y^{(5)}(\mu_n) \qquad t_i < \mu_i < t_{i+1}$$

METODO DE MILNE-CORRECTOR

Tabla 6-1: Coeficientes para la fórmula correctiva del método de Milne

N	b_{-1n}	b_{0n}	b_{1n}	b_{2n}	b_{3n}	b_{4n}	b_{5n}	Denominador
0	1	1						2
1	1	4	1					6
2	3	9	9	3				24
3	7	32	12	32	7			90
4	19	75	50	50	75	19		288
5	41	216	27	272	27	216	41	840

Métodos de Adams-Bashforth-Moulton

Fórmula predictora → **Adams-Bashforth**

Fórmula correctora → **Adams-Moulton**

Observación:

Este método presenta excelente precisión y estabilidad a bajo orden del Pn(x).

Métodos de Adams-Bashforth
Fórmula predictora

$$y_{i+1} = y_i + \int_{t_i}^{t_{i+1}} P_n(t)dt = y_i + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sum_{j=i}^{i-n} P_n(t)\, f(t_j, y_j)dt$$

$$y_{i+1} = y_i + \sum_{j=i}^{i-n} \left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} P_3(t)dt \right) f(t_j, y_j) = y_i + \sum_{j=i}^{i-n} b_{j,n}\, f(t_j, y_j)$$

$$y_{i+1} = y_i + h(f_i + \frac{1}{2}\Delta f_{i-1} + \frac{5}{12}\Delta^2 f_{i-2} + \frac{3}{8}\Delta^3 f_{i-3}) + \frac{251}{720} h^5 y^v(\xi)$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{24}\left(55 f_i - 59 f_{i-1} + 37 f_{i-2} - 9 f_{i-3}\right)$$

Métodos de Adams-Moulton
Fórmula correctora

$$y_{i+1} = y_i + \sum_{j=i}^{i-n} \left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} P_3(t)dt \right) f(t_j, y_j) = y_i + \sum_{j=i}^{i-n} b_{j,n} f(t_j, y_j)$$

$$y_{i+1} = y_i + h(f_{i+1} - \frac{1}{2}\Delta f_i - \frac{1}{12}\Delta^2 f_{i-1} - \frac{1}{24}\Delta^3 f_{i-2}) - \frac{19}{720} h^5 y^v(\xi)$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{24}\left(9 f_{i+1} + 19 f_i - 5 f_{i-1} + f_{i-2}\right)$$

Métodos de Adams-Moulton-Bashforth
Fórmula para interpolar

$$y_{i-1/2} = \frac{1}{128}\left(35y_i + 140y_{i-1} - 70y_{i-2} + 28f_{i-3} - 5f_{i-4}\right)$$

$$y_{i-3/2} = \frac{1}{64}\left(-y_i + 24y_{i-1} + 54y_{i-2} - 16f_{i-3} + 3f_{i-4}\right)$$

Métodos de Adams-Bashforth
Fórmula predictora

Coeficientes para el método de Adams-Bashforth

n	b_{0n}	B_{1n}	b_{2n}	b_{3n}	b_{4n}	Denominador	$\Sigma\| b_{in} \|$
0	1					1	1
1	3	-1				2	2
2	23	-16	5			12	3,66…
3	55	-59	37	-9		24	6,66…
4	1901	-2774	2616	-1274	251	720	12,24…

Métodos de Adams-Moulton
Fórmula correctora

Coeficientes para el método de Adams-Moulton

n	b_{-1n}	b_{0n}	b_{1n}	b_{2n}	b_{3n}	b_{4n}	Denominador	$\Sigma\| b_{in} \|$
0	1	1					2	1
1	5	8	-1				12	1,16…
2	9	19	-5	1			24	1,41…
3	251	646	-264	106	-19		720	1,78…
4	2375	7135	-3990	2410	-865	135	7200	2,34…

Ejemplo de RK-2 para sistema de ecuaciones

Usar h = 0,1

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -x \\ x(0) = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{2}\left(K_{11} + K_{12}\right)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}\left(K_{21} + K_{22}\right)$$

$$x(0) = 0$$

$$y(0) = 1$$

Donde,

$$K_{11} = hf_1\left(x_0, y_0\right)$$

$$K_{21} = hf_2\left(x_0, y_0\right)$$

$$K_{12} = hf_1\left(x_0 + K_{11}, y_0 + K_{21}\right)$$

$$K_{22} = hf_2\left(x_0 + K_{11}, y_0 + K_{21}\right)$$

PROBLEMAS DE VALOR DE FRONTERA
METODO DEL DISPARO

Si se tiene la siguiente ecuación diferencial de segundo orden:

$$y'' = f(x)y' + g(x)y + h(x), \quad a \le x \le b$$

Con las siguientes condiciones de borde:

$$y(a) = \alpha, \qquad y(b) = \beta$$

PROBLEMAS DE VALOR DE FRONTERA
METODO DEL DISPARO

Si:

a) $f(x)$, $g(x)$ y $h(x)$ son continuas en $[a,b]$.
b) $g(x) > 0$ en el intervalo $[a,b]$.

Entonces:

El problema tiene una única solución.

PROBLEMAS DE VALOR DE FRONTERA
METODO DEL DISPARO

Es posible convertir el problema anterior en un PVI. De esta manera se podría utilizar uno de los métodos para resolver PVI dados en clase.

PROBLEMAS DE VALOR DE FRONTERA
METODO DEL DISPARO

PVI-1:

$$y'' = f(x)y' + g(x)y + h(x), \quad a \le x \le b$$
$$y(a) = \alpha, \qquad y'(a) = 0$$

PVI-2:

$$y'' = f(x)y' + g(x)y + h(x), \quad a \le x \le b$$
$$y(a) = 0, \qquad y'(a) = 1$$

PROBLEMAS DE VALOR DE FRONTERA
METODO DEL DISPARO

Si y1(x) es la solución del PVI-1 y y2(x) es la solución del PVI-2, entonces:

$$\mathrm{y}(\mathrm{x}) = \mathrm{y}_1(x) + y_2(x)\frac{\beta - y_1(b)}{y_2(b)}, \quad y_2(b) \neq 0$$

Es la única solución del PVF original.

PROBLEMAS DE VALOR DE FRONTERA
METODO DEL DISPARO